Übungen zur Quantenmechanik SS 2016

20.04.16 Blatt 1

Präsenzaufgabe 1: (Wien'sches Verschiebungsgesetz)
Bestimmen Sie für eine gegebene Temperatur T die Position ω_{max} des Maximums der spektralen Energiedichte $u(\omega, T)$ nach der Planck'schen Strahlungsformel.

Hinweis: Die Funktion $f(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x - 3$ hat eine Nullstelle bei $x \approx 2,82$.

Präsenzaufgabe 2: (Compton-Streuung)
Leiten Sie aus Energie- und Impulserhaltung beim Compton-Effekt die Beziehung

$$\Delta\lambda := \lambda' - \lambda = 2\lambda_{\mathrm{C}} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{mc}$$

für die Wellenlängenänderung des gestreuten Photons her.

Hinweis: Es erweist sich als zweckmäßig, die Gleichungen für die beiden Impulskomponenten zu quadrieren, um auf diesem Wege den Streuwinkel φ des Elektrons zu eliminieren.

Präsenzaufgabe 3: (Eine wichtige Integralformel)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \; .$$

Hierbei sei a eine positive reelle Zahl.

„Wenn mir Einstein ein Radiotelegramm schickt, er habe nun die Teilchennatur des Lichtes endgültig bewiesen, so kommt das Telegramm nur an, weil das Licht eine Welle ist.“

(Niels Bohr)

Hausaufgaben für den 26.04.16

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.*

Hausaufgabe 1: (Stefan-Boltzmann-Gesetz) *(7 Punkte)*

Leiten Sie aus der Planck'schen Strahlungsformel durch Integration über die Frequenz ω das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$U(T) = \sigma T^4$$

für die abgestrahlte Energiedichte her und bestimmen Sie die Stefan-Boltzmann-Konstante σ.

Anleitung: Schreiben Sie die spektrale Energiedichte mit Hilfe der geometrischen Reihe um und benutzen Sie die Integralformel aus P3 sowie die Summenformel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Hausaufgabe 2: (Wellen und Teilchen) *(3+3 = 6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die relative Frequenzänderung $\Delta\omega/\omega$ bei der Compton-Rückstreuung (d.h. $\vartheta = \pi$) eines (i) optischen Photons der Energie 2 eV und (ii) γ-Quants der Energie 2 MeV. Bei welchem der beiden Photonen ist der Effekt also leichter zu beobachten?

b) Die erstmalige Realisierung des Doppelspaltexperiment mit Elektronen gelang Claus Jönsson im Jahr 1960. Er benutzte Elektronen mit 50 keV Energie und einen Spaltabstand von 1 μm. Berechnen Sie den räumlichen Abstand Δx zweier benachbarter Interferenzmaxima auf dem Detektorschirm, wenn sich dieser in einem Abstand von 35 cm vom Doppelspalt befindet. (**Hinweis:** Sie dürfen die Kleinwinkelnäherung aus der Vorlesung benutzen.)

Hausaufgabe 3: (Zum Gauß'schen Wellenpaket) *(7 Punkte)*

Verifizieren Sie die Identität

$$\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a} - \frac{p_0^2 d^2}{\hbar^2}} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - E_{p_0} t)} \; \mathrm{e}^{-\frac{(x - v_0 t)^2}{4\left(d^2 + i\frac{\hbar t}{2m}\right)}} ,$$

die in der Vorlesung bei der Diskussion eines gaußförmigen Wellenpakets mit Breite d und mittlerem Impuls $p_0 = m v_0$ vorkam. Hierbei gilt

$$a := \frac{d^2}{\hbar^2} + i\,\frac{t}{2m\hbar} \quad \text{und} \quad b := \frac{p_0\, d^2}{\hbar^2} + i\,\frac{x}{2\hbar} \; .$$

Aktuelle Informationen zu Vorlesung & Übungsbetrieb finden Sie auf der Webseite http://www.tp1.uni-duesseldorf.de/?id=52