

Wichtige Formeln der Vektoranalysis

Integralsatz von Gauß

Sei V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche $S(V)$ und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} \, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Der Normalenvektor auf der Oberfläche zeigt dabei nach außen.

Integralsatz von Stokes

Sei S eine Fläche mit geschlossenem Rand $C(S)$ und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Der Umlaufsinn von $C(S)$ bildet dabei mit der Flächennormalen eine Rechtsschraube.

Kombinationen aus Gradient, Divergenz und Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \vec{0} && \text{(Gradientenfelder sind wirbelfrei!)} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) &= 0 && \text{(Wirbelfelder sind quellenfrei!)} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} && \text{(vgl. "bac-cab-Regel")} \end{aligned}$$

Gradient in verschiedenen Koordinaten

Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{grad} f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz in verschiedenen Koordinaten

Zylinderkoordinaten: Für $\vec{A}(\rho, \varphi, z) = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Kugelkoordinaten: Für $\vec{A}(r, \vartheta, \varphi) = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplace-Operator in verschiedenen Koordinaten

Zylinderkoordinaten:

$$\Delta U(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta U(r, \vartheta, \varphi) &= \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)}_{= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU)} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$