

# Zur Standarddarstellung einer rationalen Funktion

**Beispiel:** Wir betrachten die rationale Funktion

$$f_r(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{(x + 1)^2} .$$

Wir wollen sie in die Standarddarstellung

$$f_r(x) = A(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{o_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j}$$

bringen.

1. Schritt: Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 - 2x^2) : (x^2 + 2x + 1) = x^2 - x - 1 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-x^4 - 2x^3 - x^2} \phantom{+ x} \\ -x^3 - 3x^2 \phantom{+ x} \\ \underline{x^3 + 2x^2 + x} \\ -x^2 + x \\ \underline{x^2 + 2x + 1} \\ 3x + 1 \end{array}$$

Damit haben wir schon einmal das Polynom  $A(x) = x^2 - x - 1$  im obigen Ausdruck bestimmt.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung

Die Funktion  $f_r(x)$  hat nur **eine** Polstelle, nämlich bei  $x_1 = -1$ , und keine weiteren Polstellen. Die Polstelle ist dabei von **2. Ordnung**. Deshalb müssen wir in der allgemeinen Formel  $k = 1$  und  $o_1 = 2$  setzen. Dies führt auf

$$\frac{3x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{a_{11}}{x + 1} + \frac{a_{12}}{(x + 1)^2} .$$

Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite und sortieren nach Potenzen ergibt nun:

$$3x + 1 = a_{11}(x + 1) + a_{12} = a_{11}x + (a_{11} + a_{12}) .$$

Da diese Gleichung für beliebige  $x$  gelten soll, müssen die Koeffizienten vor dem in  $x$  linearen Term auf beiden Seiten identisch sein und ebenso die beiden konstanten Terme. Der sogenannte Koeffizientenvergleich führt daher auf die zwei Gleichungen

$$a_{11} = 3 \quad \text{und} \quad a_{11} + a_{12} = 1 .$$

Diese werden von  $a_{11} = 3$  und  $a_{12} = -2$  gelöst.

Die gewünschte Standarddarstellung lautet somit:

$$f_r(x) = x^2 - x - 1 + \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} .$$