

Beweisverfahren in der Mathematik

Jeder mathematische Satz kann auf die Form

„Wenn A gilt, dann folgt B .“

gebracht werden (oder kurz: „Aus A folgt B “, was man symbolisch als $A \Rightarrow B$ schreibt). Dabei ist A die *Annahme* (oder *Voraussetzung*) und B die *Behauptung*. Die Aufgabe der Mathematik ist es, solche Sätze zu *beweisen*. Dafür gibt es grundsätzlich verschiedene Vorgehensweisen.

- a) **Direkter Beweis:** Am befriedigendsten ist es in der Regel, wenn man eine mathematische Aussage auf direktem Wege beweisen kann. Das heißt, durch logische Schlüsse – unter Zuhilfenahme axiomatisch geforderter Regeln und bereits bewiesener anderer Sätze – gelangt man von der Annahme A zu der Behauptung B .

Beispiel: „Wenn eine ganze Zahl k durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.“

Beweis: Wenn k durch 4 teilbar ist, dann gibt es eine ganze Zahl ℓ mit der Eigenschaft, dass $k = 4\ell$ gilt. Folglich können wir k auch schreiben als $k = 2 \cdot (2\ell)$. Dabei ist 2ℓ als Produkt zweier ganzer Zahlen wieder eine ganze Zahl. Die Faktorisierung $k = 2 \cdot (2\ell)$ bedeutet daher, dass k durch 2 teilbar ist, wie gewünscht. \square

- b) **Beweis durch Umkehrschluss:** Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch zueinander äquivalent. Das Symbol $\neg B$ bedeutet dabei das Gegenteil von B und entsprechend $\neg A$ das Gegenteil von A . (Beachte die Umkehrung der Reihenfolge von A und B in den beiden Aussagen!) Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man stattdessen auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen. Das ist manchmal einfacher. Im obigen Beispiel wäre dann zu beweisen:
„Wenn eine ganze Zahl k *nicht* durch 2 teilbar ist, dann ist sie auch *nicht* durch 4 teilbar.“

- c) **Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch):** In diesem Fall führt man den Beweis von $A \Rightarrow B$ quasi durch die Hintertür. Man nimmt nämlich an, dass $\neg B$ gilt und konstruiert daraus einen logischen Widerspruch (meistens einen Widerspruch zur Annahme A). In unserem Beispiel müsste man zeigen, dass sich aus der negierten Behauptung „ k ist *nicht* durch 2 teilbar“ ein Widerspruch zur Annahme „ k ist durch 4 teilbar“ ergibt.

- d) **Vollständige Induktion:** Dies ist ein spezielles Beweisverfahren, wenn man die Gültigkeit einer mathematischen Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ beweisen möchte. Man steht also vor der Herausforderung, unendlich viele Aussagen zu beweisen (denn es gibt unendlich viele natürliche Zahlen), aber man kann dafür nicht unendlich viele Beweise führen. Die vollständige Induktion ist eine sehr clevere und nützliche Methode, wie man einen solchen Beweis in nur drei Schritten führen kann. Wir werden sie in der Vorlesung und den Übungen ausführlich besprechen.

Die Leistungsfähigkeit der vollständigen Induktion wird von folgendem (Gegen-)Beispiel untermauert:

Wenn man in den Ausdruck $P(n) = n^2 - n + 41$ natürliche Zahlen $n = 1, 2, 3$ usw. einsetzt, erhält man für $P(n)$ scheinbar stets eine Primzahl. Probieren Sie es selbst aus! Es sieht also zunächst so aus, als sei „ $P(n)$ ist eine Primzahl“ eine für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Aussage. Bis $n = 40$ stimmt das auch. Aber was geschieht für $n = 41$?