Lösung Aufgabe I:
Induktionsverankerung: Für $n = 1$ stimmt die Formel, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k(3k+2) = 1 \cdot (3+2) = 5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2} \ .$$

Induktionsannahme: Die Formel stimme für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(3k+2) + (n+1)[3(n+1)+2] \\
&\overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+3)}{2} + (n+1)(3n+5) \\
&= \frac{n+1}{2}(2n^2+9n+10) \ = \ \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{2} \\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+3]}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe II:
Ja, es handelt sich um eine Funktion, denn die Zuordnung $x \longmapsto f(x)$ ist eindeutig. Für $x < 0$ und $x > 0$ ist dies klar (denn $\cos x$ und e^x sind eindeutige Zuordnungen), und für $x = 0$ gilt $f(0) = 1$, denn sowohl $\cos(0) = 1$ also auch $e^0 = 1$.

Lösung Aufgabe III:
Der Nenner von $f_r(x)$ hat eine einfache Nullstelle bei $x = 2$ und eine doppelte Nullstelle bei $x = -3$. Ansatz für Partialbruchzerlegung somit

$$f_r(x) = \frac{3x^2+13x-13}{(x+3)^2(x-2)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{a_2}{x+3} + \frac{a_3}{(x+3)^2}$$

$$\Longrightarrow \ 3x^2+13x-13 = (a_1+a_2)x^2 + (6a_1+a_2+a_3)x + (9a_1-6a_2-2a_3)$$

Koeffizientenvergleich liefert ein LGS, das wir auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{array}{rcrcr}
a_1 + a_2 = 3 & \Longrightarrow & a_1 + a_2 \qquad = 3 & \Longrightarrow & a_1 + a_2 \qquad = 3 \\
6a_1 + a_2 + a_3 = 13 & \overset{6\,\text{I}-\text{II}}{\Longrightarrow} & 5a_2 - \ a_3 \ = 5 & \Longrightarrow & 5a_2 - \ a_3 \ = 5 \\
9a_1 - 6a_2 - 2a_3 = -13 & \overset{9\,\text{I}-\text{III}}{\Longrightarrow} & 15a_2 + 2a_3 = 40 & \overset{3\,\text{II}-\text{III}}{\Longrightarrow} & -5a_3 = -25
\end{array}$$

Daraus erhalten wir $a_3 = 5$, $a_2 = 2$, $a_1 = 1$ und somit $f_r(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} + \frac{5}{(x+3)^2}$.

$$\Longrightarrow \ \int f_r(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+3| - \frac{5}{x+3} + C$$

Lösung Aufgabe IV:

a) Eine zweifache Anwendung der Regel von de l´Hospital ist erforderlich:

Zähler $= x^2\cosh(x)$, Zähler$\,' = 2x\cosh(x) + x^2\sinh(x)$ $\Big[$jeweils $\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\Big]$

Zähler$\,'' = 2\cosh(x) + 4x\sinh(x) + x^2\cosh(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$

Nenner $= \tan(x^2)$, Nenner$\,' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$ $\Big[$jeweils $\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\Big]$

Nenner$\,'' = \frac{2\cos^2(x^2)+2x\cdot 2\cos(x^2)\cdot\sin(x^2)\cdot 2x}{\cos^4(x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cosh(x)}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(2+x^2)\cosh(x)+4x\sinh(x)}{\frac{2[\cos(x^2)+4x^2\sin(x^2)]}{\cos^3(x^2)}} = 1$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[2x\cosh(x)+x^2\sinh(x)]\tan(x^2) - x^2\cosh(x)\frac{2x}{\cos^2(x^2)}}{\tan^2(x^2)} \\ &= \frac{2x\cosh(x)+x^2\sinh(x)}{\tan(x^2)} - \frac{2x^3\cosh(x)}{\sin^2(x^2)} \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe V:

a) Mit der Substitution $u = \sqrt{5x}$, so dass $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2u}$, findet man

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{5}\int_0^{\sqrt{10}} \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{5}\int_0^{\sqrt{10}} \Bigg(\underbrace{\frac{u+1}{1+u}}_{=1} - \frac{1}{1+u}\Bigg)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{5}\Big[u - \ln(1+u)\Big]_0^{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\Big[\sqrt{10} - \ln\big(1+\sqrt{10}\big)\Big]\ . \end{aligned}$$

b) Eine zweifache partielle Integration (mit $f' = \mathrm{e}^{2x}$ und $g = x^2+3$ im ersten Schritt) liefert

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{2x}(x^2+3)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+3) - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,2x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+3) - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+3) - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\left(x^2 - x + \frac{7}{2}\right) + C\ . \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die partielle Integration mit $f' = \mathrm{e}^{2x}$ und $g = x$ ausgeführt.

Lösung Aufgabe VI:

Wir setzen $\vec{k} = \vec{a}\times\vec{b}$ und erhalten mit der bac-cab-Regel:

$$\begin{aligned} \vec{k}\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{c}\,(\vec{k}\cdot\vec{d}) - \vec{d}(\vec{k}\cdot\vec{c}) \\ &= \vec{c}\,\Big[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}\Big] - \vec{d}\Big[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\Big] \\ &= \vec{c}\,\Big[(\vec{b}\times\vec{d})\cdot\vec{a}\Big] - \vec{d}\Big[(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\Big] \qquad |\ \text{zyklische Invarianz des Spatprodukts} \\ &= \vec{c}\,\Big[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})\Big] - \vec{d}\Big[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\Big] \end{aligned}$$