

Lösung Aufgabe I:

a) char. Polynom $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$
 \implies Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$

zugehörige Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = 7 : \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 4 \end{pmatrix}$$

(\vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind wie üblich nur bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt.)

b) Skalarprodukt: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} + (-2) \cdot 4 = 8 - 8 = 0 \implies \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

Anmerkung: In der Quantenmechanik werden Sie lernen, dass Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen (bzw. hermiteschen) Matrix gehören, stets orthogonal zueinander sind.

Lösung Aufgabe II:

$$\ln(2i) = \ln 2 + \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25}$$

$$\implies \frac{\ln(2i)}{3-4i} = \frac{1}{25} \left[(3 \ln 2 - 2\pi) + i \left(4 \ln 2 + \frac{3\pi}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \implies \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{625} \left[(3 \ln 2 - 2\pi)^2 - \left(4 \ln 2 + \frac{3\pi}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{625} \left[(3 \ln 2)^2 - 12\pi \ln 2 + 4\pi^2 - (4 \ln 2)^2 - 12\pi \ln 2 - \frac{9}{4}\pi^2 \right] \\ &= \frac{1}{625} \left[-7(\ln 2)^2 - 24\pi \ln 2 + \frac{7}{4}\pi^2 \right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{625} \cdot 2(3 \ln 2 - 2\pi) \left(4 \ln 2 + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{625} \left[24(\ln 2)^2 - 7\pi \ln 2 - 6\pi^2 \right]$$

Lösung Aufgabe III:

1) allgemeine Lösung der hom. DGL $y'' - 3y' + 2y = 0$:

$$\text{Ansatz } y = e^{\lambda x} \implies \text{char. Gleichung } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \text{Nullstellen } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \implies y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2) spezielle Lösung der inhom. DGL:

$$\text{Ansatz in Form der Inhomogenität } y_{\text{sp}} = c \\ \implies y_{\text{sp}}'' - 3y_{\text{sp}}' + 2y_{\text{sp}} = 2c \stackrel{!}{=} 6 \implies c = 3 \text{ und } y_{\text{sp}}(x) = 3$$

3) allgemeine Lösung der inhom. DGL folglich $y_{\text{inhom}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3$

4) Einbau der A.B.'n:

Mit $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$ erhalten wir

$$y(0) = C_1 + C_2 + 3 \stackrel{!}{=} 4 \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 \stackrel{!}{=} 0$$

Dies liefert $C_1 = 2, C_2 = -1$ und somit $y(x) = 2e^x - e^{2x} + 3$.

Lösung Aufgabe IV:

Separation der Variablen führt auf

$$\frac{dN}{dx} = -\lambda \frac{N^2}{1 + \sqrt{x}} \implies \frac{dN}{N^2} = -\lambda \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \implies -\frac{1}{N} = \int \frac{dN}{N^2} = -\lambda \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

Das Integral über dx kann man mit der Substitution $u := 1 + \sqrt{x}$ auswerten. Umstellen nach x liefert $x = (u - 1)^2$ und daher $\frac{dx}{du} = 2(u - 1)$. Damit folgt

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{u} \cdot 2(u - 1) du = 2 \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = 2(u - \ln u) = 2[1 + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + C.$$

Wir setzen den gewonnenen Ausdruck in die obige Gleichung ein:

$$-\frac{1}{N} = -2\lambda[1 + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] - \lambda C$$

(statt $-\lambda C$ könnte man auch eine neue Konstante C' einführen). Nun lösen wir nach $N(x)$ auf:

$$N(x) = \frac{1}{2\lambda[1 + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + \lambda C}.$$

Einbau der A.B.: $N(0) = \frac{1}{(2+C)\lambda} \stackrel{!}{=} N_0$. Dies liefert $C = \frac{1}{\lambda N_0} - 2$ und somit

$$N(x) = \frac{1}{2\lambda[1 + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + \frac{1}{N_0} - 2\lambda} = \frac{1}{2\lambda[\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + \frac{1}{N_0}}.$$

Anmerkungen:

- (i) Alternativ kann man die obige Substitution auch ausführen, indem man aus $u = 1 + \sqrt{x}$ die Relation $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2(u-1)}$ erhält. Folglich ist $dx = 2(u-1) du$, und man findet wie zuvor

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{u} \cdot 2(u-1) du = \dots$$

- (ii) Anstelle der Substitution $u := 1 + \sqrt{x}$ kann man auch mit $t := \sqrt{x}$ arbeiten.

Lösung Aufgabe V:

Es ist $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 \cos(xy^2 + z) [4y + \cos(3x)] + \sin(xy^2 + z) \cdot 3 \sin(3x)}{[4y + \cos(3x)]^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy \cos(xy^2 + z) [4y + \cos(3x)] - \sin(xy^2 + z) \cdot 4}{[4y + \cos(3x)]^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\cos(xy^2 + z)}{4y + \cos(3x)}.$$

Am Punkt $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ ist somit $\vec{\nabla} f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe VI:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^3 \int_y^{1+y} xy \, dx \, dy = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{1+y} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^3 \underbrace{[(1+y)^2 - y^2]}_{=1+2y} y \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (y + 2y^2) \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 18 \right) = \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^R dr \, r^2 \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \, \sin \vartheta \underbrace{\int_0^{\pi} d\varphi}_{= \varphi \Big|_0^{\pi} = \pi} = \pi \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \, \sin \vartheta}_{= -\cos \vartheta \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1} = \pi \int_0^R dr \, r^2 = \pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Viertelkugel.