Mathematische Methoden I WS 2019/20

14.10.19 Blatt 1

Präsenzaufgabe 1: (Mengen reeller Zahlen)

a) Betrachten Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 4\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 2\}$.

   i) Schreiben Sie M_1 und M_2 als Intervalle und skizzieren Sie diese auf der reellen Achse.

   ii) Bilden und skizzieren Sie die Mengen $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \backslash M_2$ und $M_2 \backslash M_1$.

b) Geben Sie die Menge $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-2| < \frac{3}{2} \right\}$ als Intervall auf der reellen Achse an.

Präsenzaufgabe 2: (Summenzeichen)

Drücken Sie die folgenden Summen auf mindestens zwei verschiedene Arten mit dem Summenzeichen aus:

$$5 + 9 + 13 + ... + 401 \qquad \text{und} \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024 \; .$$

Präsenzaufgabe 3: (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \; .$$

Präsenzaufgabe 4: (Von Mücken und Elefanten)

Wir betrachten einen Elefanten mit dem Gewicht x und eine Mücke mit dem Gewicht y. Die Gewichtsdifferenz sei d. Auf den ersten Blick scheint die folgende Kette von Gleichungen zu beweisen, dass Elefant und Mücke gleich schwer sind:

$$\begin{aligned}
x &= y + d && | \cdot (x-y) \\
x^2 - xy &= xy + xd - y^2 - yd && | - xd \\
x^2 - xy - xd &= xy - y^2 - yd && \\
x(x-y-d) &= y(x-y-d) && | : (x-y-d) \\
x &= y &&
\end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

Aktuelle Informationen zu Vorlesung & Übungsbetrieb finden Sie auf der Webseite http://www.tp1.hhu.de/?id=66

Hausaufgaben für den 21.10.19
(Abgabe bis spätestens 12:00 Uhr in die Zettelboxen neben Büro 25.32.01.52)

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.*

Hausaufgabe 1: (Weitere Mengen) *(4+2 = 6 Punkte)*

a) Geben Sie die folgenden Mengen durch explizite Aufzählung ihrer Elemente an:
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + 3x = 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 - 10x^2 + 9 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$.

b) Geben Sie die Menge $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+2)^2 \le 5 \right\}$ als Intervall auf der reellen Achse an.

Hausaufgabe 2: (Diverse Summen) *(2+2+2 = 6 Punkte)*
Ermitteln Sie die Werte der folgenden Summen:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} , \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=3}^{6} \binom{n}{n-2} , \qquad \text{c)} \quad \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{2} (i+j) .$$

Hausaufgabe 3: (Vollständige Induktion) *(5 Punkte)*
Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Verankern Sie wie üblich bei $n = 1$.

Hausaufgabe 4: (Ein Weg aus der Schuldenkrise?) *(3 Punkte)*
Ein bauernschlauer Finanzökonom behauptet, einen Weg gefunden zu haben, wie man die Schulden der europäischen Staaten auf einen Schlag drastisch reduzieren kann. Mit folgender Gleichungskette führt er vor, dass 1 Euro = 1 Cent ist:

$$1\,\text{Euro} = 100\,\text{Cent} = (10\,\text{Cent})^2 = (0.1\,\text{Euro})^2 = 0.01\,\text{Euro} = 1\,\text{Cent}$$

An welchen Stellen läuft diese Argumentation schief und warum?