Mathematische Methoden I WS 2019/20

16.12.19 Blatt 10

Präsenzaufgabe 29: (Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) = \lambda\, y(x) + \mu\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

unter der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Hierbei seien λ und μ positive reelle Parameter. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Finden Sie zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

b) Ermitteln Sie anschließend eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

c) Passen Sie schließlich die auftretende Integrationskonstante an die Anfangsbedingung an.

Präsenzaufgabe 30: (Separation der Variablen)
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung $y(x)$ der folgenden beiden Differentialgleichungen:

$$\text{a)} \quad y' = \mathrm{e}^{x-y} \; ; \qquad \text{b)} \quad y' = 2xy^2 \; .$$

Präsenzaufgabe 31: (Freier Fall)
Der freie Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde (Fallbeschleunigung $= g$) wird beschrieben durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{h}(t) = -g \; .$$

Die Anfangsbedingungen seien $h(0) = h_0$ (Ausgangshöhe) und $\dot{h}(0) = v_0$ (Startgeschwindigkeit).

Lösen Sie die Differentialgleichung in zwei Schritten, indem Sie zunächst die Variable $v(t) = \dot{h}(t)$ einführen und die entsprechende Differentialgleichung erster Ordnung für $v(t)$ lösen. Anschließend erhalten Sie dann $h(t)$ als Lösung von $\dot{h}(t) = v(t)$.

Das Mathematische-Methoden-Team wünscht Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein gesundes und erfolgreiches Neues Jahr!

Hausaufgaben für den 06.01.20

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe* <u>*leserlich*</u> *kennzeichnen.*

Hausaufgabe 33: (Noch eine inhomogene Differentialgleichung) *(5 Punkte)*
Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' + 4y \;=\; x\,\mathrm{e}^{2x}$$

unter der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Hausaufgabe 34: (Chemische Reaktionskinetik) *(5 Punkte)*
Wir betrachten monomolekulare chemische Reaktionen, bei denen ein Stoff A in einen Stoff B umgewandelt wird. Sei α die Konzentration von A zur Zeit $t = 0$ und $n(t)$ die Konzentration der umgewandelten Substanz B zur Zeit t. Dann ist die Reaktionsrate $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ nach dem sogenannten *Massenwirkungsgesetz* gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \;=\; \lambda\,(\alpha - n) \qquad \text{mit einer reellen Konstanten } \lambda > 0\ .$$

Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $n(0) = 0$. Welchem asymptotischen Wert strebt $n(t)$ für $t \to \infty$ entgegen?

Hausaufgabe 35: (Separation der Variablen zum Zweiten) *(3 Punkte)*
Lösen Sie – unter der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ – die nichtlineare Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}\ .$$

Hausaufgabe 36: (Vermehrung von Fruchtfliegen) $\boxed{\textbf{Team}}$ *(5+2 = 7 Punkte)*
Die Änderungsrate $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ einer Population von Fruchtfliegen (*Drosophila*) mit der Populationsgröße $N(t)$ wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN^2 + bN \quad \text{mit} \quad a = -\frac{1}{5000} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{5}$$

beschrieben. Die Zeit t wird dabei in Tagen gemessen.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $N(0) = 10$.
Hinweis: Bei der Integration hilft Ihnen die Formel aus H19.

b) Zeigen Sie, dass die Population ständig wächst, aber niemals mehr als 1000 Mitglieder hat.