

Präsenzaufgabe 32: (Spezielle Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung)

Wir untersuchen die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) + 2y(x) = 4x .$$

- a) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und anschließend eine spezielle Lösung über eine Variation der Konstanten.
- b) Zeigen Sie, dass man dieselbe spezielle Lösung erhalten kann über einen „Ansatz in Form der Inhomogenität“, welcher im vorliegenden Fall $y_s(x) = ax + b$ lautet.

Präsenzaufgabe 33: (Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Ermitteln Sie die Lösungen $y(x)$ bzw. $u(t)$ der beiden inhomogenen Differentialgleichungen

a) $y'' - 10y' + 9y = 18$,

b) $\ddot{u} + 4\dot{u} + 13u = 13t$,

wobei in a) auch die Anfangsbedingungen $y(0) = 5$ und $y'(0) = -5$ erfüllt sein sollen.

Hausaufgaben für den 13.01.20

Hinweis: Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.

Hausaufgabe 37: (Spezielle Lösungen)

(1,5+1,5 = 3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine spezielle Lösung für die beiden folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' + y' + y = x^2$; b) $y'' + 3y' - 2y = e^{2x}$.

Hausaufgabe 38: (Zum aperiodischen Grenzfall)

(3+3=6 Punkte)

- a) Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 .$$

Zeigen Sie durch explizites Einsetzen, dass die Funktion $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ mit $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2}$ eine (zweite) Lösung dieser Differentialgleichung ist, falls $\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} = 0$ gilt.

- b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

unter den Anfangsbedingungen $y(0) = 3, y'(0) = 5$.

Hausaufgabe 39: (Freier Fall mit Reibung)

(2+1+2=5 Punkte)

Wir betrachten den freien Fall eines Körpers bei Vorliegen einer (Stokesschen) Reibungskraft. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$m\ddot{y}(t) = -\alpha\dot{y}(t) - mg .$$

Hierbei bezeichnet m die Masse des Körpers, $\alpha > 0$ den Reibungskoeffizienten und g die Fallbeschleunigung. Die Anfangsbedingungen seien $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = v_0$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.
- Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes $y_s(t) = at + b$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
- Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an und passen Sie die darin enthaltenen Integrationskonstanten den Anfangsbedingungen an.

Hausaufgabe 40: (Differentialgleichungssystem)

Team

(2+2+2=6 Punkte)

Lösen Sie das System zweier gekoppelter Differentialgleichungen $\vec{y}' = A\vec{y}$ mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 0, y_2(0) = 5$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A .
- Lösen Sie das entkoppelte Differentialgleichungssystem für den transformierten Vektor $\vec{u} = B^{-1}\vec{y}$. Hierbei ist B^{-1} die Matrix, welche vermöge $B^{-1}AB$ die Matrix A diagonalisiert.
- Transformieren Sie Ihre Lösung aus b) zurück auf den Vektor $\vec{y} = B\vec{u}$ und legen Sie die freien Integrationskonstanten so fest, dass die Anfangsbedingungen erfüllt werden.