

Präsenzaufgabe 34: (Gradienten)

- a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x, y, z) = 3ax^2y + by^2z^3$.
 a und b sind dabei Konstanten.
- b) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2) e^{xy}$
an der Stelle $x = 1, y = 2, z = 0$.

Präsenzaufgabe 35: (Eine Funktion mit stationärem Punkt)

- a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 4y^2 + y - 5$$

auf etwaige Extrem- und Sattelpunkte.

- b) Skizzieren Sie $f(x, y)$ im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ und $-2 \leq y \leq 2$.

Präsenzaufgabe 36: (Totales Differential)

Druck p , Temperatur T und Volumen V eines idealen Gases genügen der Gleichung

$$pV = \nu RT .$$

Hierbei bezeichnen ν und R gewisse Konstanten.

- a) Berechnen Sie das totale Differential der Funktion $p(V, T)$.
- b) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus a), um näherungsweise die relative Druckänderung $\frac{dp}{p}$ zu berechnen, die sich ergibt, wenn die Temperatur des Gases von 500 K auf 495 K sinkt und sich gleichzeitig das Volumen von 1 m^3 auf 0.95 m^3 verkleinert.

Hausaufgaben für den 20.01.20

Hinweis: Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.

Hausaufgabe 41: (Gradienten) (3+1=4 Punkte)

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} f$ für die Funktionen $f_1(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ und $f_2(x, y, z) = z \ln(x^3 + y)$.

b) Zeigen Sie, dass für den Gradienten eines Produkts zweier Funktionen die Formel

$$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla}g) + g(\vec{\nabla}f)$$

gilt, indem Sie diese Gleichung komponentenweise verifizieren.

Hausaufgabe 42: (Stationäre Punkte) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrempunkte und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) e^{-x^2 - 4y^2} .$$

Hausaufgabe 43: (Exakte Differentialgleichung) Team (2,5+2,5=5 Punkte)

Eine Differentialgleichung der Form $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ kann man formal auch schreiben als

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 . \quad (1)$$

Falls es eine Funktion $F(x, y)$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ gibt, so stellt die linke Seite von (1) gerade das totale Differential dF dar. Die Gleichung $dF = 0$ bedeutet, dass die Lösung der Differentialgleichung die Beziehung $F(x, y(x)) = C$ erfüllt. Hierbei bezeichnet C eine zunächst beliebige Konstante; ihr Wert wird durch eine Anfangsbedingung festgelegt.

Betrachten Sie vor diesem Hintergrund die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2y^2}{4xy} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1 . \quad (2)$$

a) Finden Sie eine Funktion $F(x, y)$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 4xy$.

b) Bestimmen Sie anschließend die Lösung der Differentialgleichung (2), indem Sie die Beziehung $F(x, y) = C$ nach y auflösen und die Anfangsbedingung einbauen.

Hausaufgabe 44: (Mehrdimensionales Integral) (3 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{z=0}^{\infty} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\pi} x y^2 \sin(x) e^{-3z} dx dy dz .$$