Mathematische Methoden I — WS 2019/20

20.01.20 Blatt 13

Präsenzaufgabe 37: (Mehrdimensionale Integrale)

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\Theta = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2)\, \rho_0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

eines Würfels mit der Kantenlänge a und der konstanten Dichte ρ_0 bzgl. einer Drehung um die z-Achse, die durch eine der Würfelkanten verläuft.

b) Berechnen Sie das Integral (der Integrand ist $f(x, y, z) \equiv 1$)

$$I_P = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-z\frac{a}{2h}}^{z\frac{a}{2h}} \mathrm{d}y \int_{-z\frac{a}{2h}}^{z\frac{a}{2h}} \mathrm{d}x \; .$$

Das Volumen welcher geometrischen Figur stellt I_P dar?

Präsenzaufgabe 38: (Ein wichtiges bestimmtes Integral)
Beweisen Sie die Integralformel $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ auf dem folgenden Weg:

Schreiben Sie das Quadrat von I, d.h.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y \right),$$

als ein zweidimensionales Integral über x und y. Transformieren Sie dieses zweidimensionale Integral auf Polarkoordinaten und berechnen es anschließend. Folgern Sie aus Ihrem Ergebnis die obige Formel $I = \sqrt{\pi}$.

Präsenzaufgabe 39: (Jacobi-Determinante für Kugelkoordinaten)
Bestimmen Sie für Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \; , \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \; , \quad z = r \cos\vartheta$$

die Determinante der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \; .$$

Letzte Hausaufgaben für den 27.01.20

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe* <u>leserlich</u> *kennzeichnen.*

Hausaufgabe 45: (Weitere mehrdimensionale Integrale) *(2+4 = 6 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)}\quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ , \qquad \text{b)}\quad I_2 = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{4-2x} \mathrm{d}y \int_0^{8-4x-2y} \mathrm{d}z\ 45x^2y\ .$$

Hausaufgabe 46: (Trägheitsmoment) *(5 Punkte)*
Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Pyramide mit Höhe h, quadratischer Grundfläche und konstanter Dichte ρ_0 bzgl. einer Drehung um die Mittelachse (vgl. P37):

$$\Theta_P = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-z\frac{a}{2h}}^{z\frac{a}{2h}} \mathrm{d}y \int_{-z\frac{a}{2h}}^{z\frac{a}{2h}} \mathrm{d}x\ (x^2+y^2)\rho_0\ .$$

Drücken Sie Ihr Endergebnis durch die Seitenlänge a und die Masse M der Pyramide aus.

Hausaufgabe 47: (Elliptische Koordinaten) *(2,5+1,5 = 4 Punkte)*
Wir betrachten elliptische Koordinaten

$$x = a\cosh(u)\cos(v)\ , \quad y = a\sinh(u)\sin(v)\ .$$

Hierbei ist a eine fest vorgegebene positive Konstante und es gilt $u \in [0,\infty)$, $v \in [0,2\pi)$.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Jacobi-Matrix gegeben ist durch

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = a^2[\sinh^2(u) + \sin^2(v)]\ .$$

b) Welche Gestalt haben die Koordinatenlinien für $u =$ konst.? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 48: (Kugeltank) **Team** *(5 Punkte)*
Berechnen Sie die Füllmenge $V(h)$ eines kugelförmigen Tanks mit Radius R in Abhängigkeit von der Füllhöhe h für $0 \le h \le R$.

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten und legen die z-Achse vertikal nach oben durch den Kugelmittelpunkt sowie den Auflagepunkt der Kugel in den Koordinatenursprung ($z = 0$).