Mathematische Methoden I WS 2019/20

27.01.20 Blatt 14

Präsenzaufgabe 40: (Kugelkoordinaten)

a) Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R f_1(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \quad \text{für} \quad f_1(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \; .$$

Welche Gestalt hat der Integrationsbereich?

b) Berechnen Sie das Integral I_2 der Funktion

$$f_2(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}$$

über den durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ beschriebenen Integrationsbereich. Benutzen Sie dazu geeignete Koordinaten.

Präsenzaufgabe 41: (Trägheitsmoment eines Zylinders)

Wir wollen das Trägheitsmoment Θ eines Zylinders bzgl. einer Drehung um seine Symmetrieachse berechnen. Der Zylinder habe die Höhe h, den Radius R und die konstante Dichte μ_0.

a) Wie lautet das Integral für Θ in kartesischen Koordinaten?

b) Wie lautet das Integral für Θ in Zylinderkoordinaten?

c) Berechnen Sie das Integral aus b).

Die Modulprüfung findet am 11.02.20 um 12:00 Uhr statt.

Die Übungsgruppen 1 und 2 schreiben im Hörsaal 5D,
die Übungsgruppen 3 und 6 im Hörsaal 3D,
die Übungsgruppen 4 und 5 im Hörsaal 3A
und die Übungsgruppen 7 und 8 im Hörsaal 5C.

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Modulprüfung
(Beachten Sie: Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden nicht bepunktet.)

Aufgabe I: Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.

Aufgabe II: Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \left[\frac{\ln(2i)}{3-4i}\right]^2 .$$

Aufgabe III: Ermitteln Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 6$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

Aufgabe IV: Bestimmen Sie für $x \geq 0$ die Lösung $N(x)$ der Differentialgleichung

$$N' = -\lambda \frac{N^2}{1+\sqrt{x}}$$

mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ und dem positiven reellen Parameter λ.

Aufgabe V: Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2 + z)}{4y + \cos(3x)} .$$

Wie lautet $\vec{\nabla} f$ insbesondere im Punkt $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$?

Aufgabe VI: Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int_0^3 \int_y^{1+y} x\, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \, \sin\vartheta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \, .$$

Das Volumen welcher geometrischen Figur stellt I_2 dar?