Mathematische Methoden I WS 2019/20

21.10.19 Blatt 2

Präsenzaufgabe 5: (Funktionen und ihre Wertemengen)

a) Bei welchen der folgenden Zuordnungen handelt es sich um Funktionen?

   i) $y = x^2$ für $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   ii) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

   iii) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$, wobei y Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist

   iv) $y = \frac{1}{1-x}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

b) Bestimmen Sie die Wertemengen der Funktionen aus a).
   Welche der Funktionen sind umkehrbar?

Präsenzaufgabe 6: (Polynomdivision)
Gegeben sei die Nullstelle $x_1 = -3$ des kubischen Polynoms

$$P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 \ .$$

Berechnen Sie die restlichen Nullstellen des Polynoms.

Präsenzaufgabe 7: (Standarddarstellung einer rationalen Funktion)
Bringen Sie die Funktion

$$f_r(x) = \frac{x^6 + 4x^5 - x^4 - 17x^3 - 33x^2 - 4x + 125}{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}$$

mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung in die standardisierte Form

$$f_r(x) = A(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{o_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} \quad ,$$

wobei $A(x)$ eine Polynomfunktion bezeichnet, x_i eine Polstelle der Ordnung o_i ist und die a_{ij} reelle Konstanten sind. (**Hinweis:** Den Nenner in $f_r(x)$ kennen Sie aus P6.)

Präsenzaufgabe 8: (Symmetrie von Funktionen)
Welche der folgenden Funktionen sind gerade? Welche sind ungerade?

a) $f(x) = \cos(3x)$; b) $f(x) = x^2 \sin(x)$; c) $f(x) = x^2 + \sin(x)$; d) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 7$.

Hausaufgaben für den 28.10.19

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.*

Hausaufgabe 5: (Definitionsbereich und Wertemenge von Funktionen) *(2+2 = 4 Punkte)*
Betrachten Sie die folgenden Zuordnungsvorschriften:

$$\text{i) } y = 5\,; \quad \text{ii) } y = 2x + 3\,; \quad \text{iii) } y = (x-4)^2 + 8\,; \quad \text{iv) } y = \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$

a) Geben Sie für jede der Zuordnungen den größtmöglichen Definitionsbereich D (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) an, so dass aus den Zuordnungen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = y$ werden.

b) Geben Sie jeweils auch die zugehörige Wertemenge W_f an.

Hausaufgabe 6: (Polynomdivision und Partialbruchzerlegung) *(8 Punkte)*
Bringen Sie die Funktion

$$f_r(x) = \frac{x^6 + 4x^5 - x^4 - 17x^3 - 33x^2 - 132x - 168}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung in die standardisierte Form

$$f_r(x) = A(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{o_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} \quad ,$$

wobei $A(x)$ eine Polynomfunktion bezeichnet, x_i eine Polstelle der Ordnung o_i ist und die a_{ij} reelle Konstanten sind. (**Hinweis:** Eine Nullstelle des Polynoms im Nenner ist $x_1 = -2$.)

Hausaufgabe 7: (Periodizität von Funktionen) *(1+1+1+1 = 4 Punkte)*
Welche der folgenden Funktionen sind periodisch? Wie groß ist in diesem Fall ihre Periode?

a) $f(x) = \cos(5x + 1)\,;$ b) $f(x) = \sin(3x) + \cos(x)\,;$ c) $f(x) = \sin\left(x^2\right)\,;$ d) $f(x) = \sin^2(x)$

Hausaufgabe 8: (Trigonometrische Relationen) *(2+2 = 4 Punkte)*
Verwenden Sie die Ihnen bekannten Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$, um die folgenden Relationen zu zeigen:

$$\text{a) } \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x\,; \qquad \text{b) } 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,.$$