Mathematische Methoden I WS 2019/20

28.10.19 Blatt 3

Präsenzaufgabe 9: (Vermischtes)
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\dfrac{2^6 \cdot 3^7}{6^5 \cdot 9^2}$

b) $\mathrm{e}^{1+x^2} \cdot (\mathrm{e}^{-x})^2$

c) $\mathrm{e}^{2\ln x} - x^2$

d) $3\ln x - 2\ln\sqrt{x} - \ln x^2$

e) $\arcsin(2\sin x\cos x)$

f) $\cosh(\ln 2)$

Präsenzaufgabe 10: (Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen)
Beweisen Sie die Relationen

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\ ,\\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\ .\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 11: (Ableitungsregeln)
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (3x+1)^2$ mit

i) der Regel für Polynome, indem Sie den Ausdruck zunächst ausmultiplizieren;

ii) der Produktregel;

iii) der Kettenregel.

Hausaufgaben für den 04.11.19

Hinweis: *Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe* <u>*leserlich*</u> *kennzeichnen.*

Hausaufgabe 9: (Logarithmen) *(2+2 = 4 Punkte)*

a) Zeigen Sie die Identität $a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$ für positive reelle Zahlen a und b.

b) Den Beitrag zum globalen Temperaturanstieg (in Grad Celsius) durch Kohlendioxid in der Atmosphäre erhält man näherungsweise aus der Formel $\Delta T \approx 4^\circ \ln\left(\frac{c}{c_0}\right)$. Dabei ist $c_0 = 280\,\mathrm{ppm}$ die vorindustrielle CO_2-Konzentration und $c = 420\,\mathrm{ppm}$ ihr heutiger Wert. Wie groß ist demnach die zur Zeit resultierende Temperaturerhöhung ΔT ?
Hinweis: Verwenden Sie keinen Taschenrechner, sondern die Relation $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

Hausaufgabe 10: (Arkus-Funktionen) *(3+3 = 6 Punkte)*

Zeigen Sie die beiden Identitäten

a) $2\arccos x = \arccos\left(2x^2 - 1\right)$ für $x \in [0, 1]$; b) $\arctan x = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Hausaufgabe 11: (Zum Begriff der Stetigkeit) *(2+4 = 6 Punkte)*

a) Zeichnen Sie den Graphen der Sägezahnfunktion $f_S(x)$, die definiert ist durch $f_S(x) = x$ für $x \in [0, 1)$ und periodische Fortsetzung (d.h. $f_S(x+1) = f_S(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Geben Sie auch die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f_S(x)$ an.

b) Wird die Netzhaut eines Auges mit Licht bestrahlt, so ergibt ein vereinfachtes Modell den folgenden Spannungsverlauf entlang der Zellmembranen am Ort x auf der Netzhaut:

$$V(x) = \begin{cases} V_0\left[2 - \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] & \text{für } |x| \le d \\ \alpha V_0\, \mathrm{e}^{-|x|/\lambda} & \text{für } |x| > d \end{cases}$$

Hierbei sind V_0, λ und d positive Konstanten. Welche Symmetrie hat $V(x)$? Bestimmen Sie den Parameter α so, dass $V(x)$ überall stetig ist. (Drücken Sie Ihr Ergebnis in Potenzen von e aus.) Skizzieren Sie die Form des Graphen von $V(x)$ für beliebige V_0, λ und d.

Hausaufgabe 12: (Zur Produktregel) *(4 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Formel für ihre n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x) = \left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right]\mathrm{e}^x .$$

Verankern Sie den Induktionsbeweis dabei wie üblich bei $n = 1$.