

**Präsenzaufgabe 21:** (Ein zeitabhängiger Vektor)

Die Position eines Teilchens auf einer Kreisbahn vom Radius  $R$  werde als Funktion der Zeit beschrieben durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  des Teilchens und zeigen Sie, dass diese zu jeder Zeit senkrecht auf dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  steht.
- Ermitteln Sie auch die Beschleunigung  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$  des Teilchens. In welcher Beziehung zum Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  steht sie?

**Präsenzaufgabe 22:** (Doppeltes Kreuzprodukt)

Berechnen Sie für die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

das doppelte Kreuzprodukt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

- auf direktem Wege;
- unter Verwendung der „bac-cab-Regel“.

**Präsenzaufgabe 23:** (Lineare Unabhängigkeit)

- Zeigen Sie, dass die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus P22 linear unabhängig sind.
- Bilden die drei Vektoren eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$ ?

## Hausaufgaben für den 02.12.19

**Hinweis:** Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.

### Hausaufgabe 25: (Skalarprodukt)

(4 Punkte)

Der Vektor  $\vec{b} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$  sei gegeben. Zerlegen Sie den Vektor

$$\vec{a} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$$

gemäß  $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$  in einen Vektor  $\vec{a}_\perp$  senkrecht zu  $\vec{b}$  und einen Vektor  $\vec{a}_\parallel$  parallel zu  $\vec{b}$ .

### Hausaufgabe 26: (Vektorraum der Polynome) Team

(6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe von Definition (5.11), dass die Menge

$$K_n[x] = \left\{ f(x) \mid f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ mit } a_i \in K \text{ für } i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

der Polynome vom Grad  $\leq n$  mit der in der Vorlesung eingeführten Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über dem Körper  $K$  bildet.

### Hausaufgabe 27: (Lineare Gleichungssysteme)

(6 Punkte)

Betrachten Sie die beiden homogenen linearen Gleichungssysteme  $A\vec{x} = \vec{0}$  mit

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- i) Berechnen Sie in beiden Fällen den Lösungsraum. Wie groß ist jeweils seine Dimension?
- ii) Bilden die Spaltenvektoren der Matrix  $A$  in a) bzw. b) eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$ ?

### Hausaufgabe 28: (Exponentialmatrix)

(4 Punkte)

Für eine quadratische Matrix  $A$  nennt man  $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$  die zugehörige Exponentialmatrix (sofern die Reihe konvergiert). Berechnen Sie die Exponentialmatrizen  $e^A$  und  $e^B$  für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis:** Durch Berechnung der ersten Reihenglieder können Sie in beiden Fällen eine Systematik erkennen. Für eine beliebige  $2 \times 2$ -Matrix  $M$  gilt dabei  $M^0 = \mathbb{I}_2$ .