Mathematische Methoden I WS 2019/20

02.12.19 Blatt 8

Präsenzaufgabe 24: (Zur Matrixmultiplikation)
Das Rechnen mit Matrizen ist historisch aus der Untersuchung linearer Gleichungssysteme entstanden. Aus dieser Perspektive wird daher auch die – kompliziert anmutende – Regel zur Multiplikation zweier Matrizen verständlich, wie Sie sich in dieser Aufgabe klarmachen sollen.

Betrachten Sie dazu exemplarisch zwei lineare Gleichungssysteme der Form $A\vec{y} = \vec{d}$ und $B\vec{x} = \vec{y}$ mit 2×2-Matrizen A und B.

a) Schreiben Sie die beiden Gleichungssysteme zunächst als einzelne Gleichungen aus.

b) Verwenden Sie die Gleichungen, um einen Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{d}$ herzustellen. Wie lautet demnach die Matrix C im Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{d}$?

Präsenzaufgabe 25: (Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierung einer Matrix)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

b) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren von A.

c) Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine invertierbare Matrix B und ihr Inverses B^{-1} angeben mit der Eigenschaft:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Die Zwischenklausur findet am 7. Dezember 2019 um 9:30 Uhr statt.

Die Übungsgruppen 1 und 5 schreiben im Hörsaal 5C,
die Übungsgruppen 2 und 6 im Hörsaal 5K,
die Übungsgruppen 3 und 8 im Hörsaal 5D
und die Übungsgruppen 4 und 7 im Hörsaal 5L.

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Zwischenklausur
(Beachten Sie: Diese Aufgaben sind <u>nicht</u> abzugeben und werden nicht bepunktet.)

Aufgabe I: Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+2) = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+3)\,.$$

Aufgabe II: Handelt es sich bei der Zuordnung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \leq 0 \\ e^x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

um eine Funktion?
Begründen Sie Ihre Antwort; betrachten Sie dabei insbesondere den Punkt $x = 0$.

Aufgabe III: Zerlegen Sie die folgende rationale Funktion in Partialbrüche:

$$f_r(x) = \frac{3x^2 + 13x - 13}{(x+3)^2(x-2)}\ ;$$

berechnen Sie danach das unbestimmte Integral $\int f_r(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe IV: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2 \cosh(x)}{\tan(x^2)}$. Berechnen Sie

a) den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$;

b) die Ableitung $f'(x)$.

Aufgabe V: Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\text{a)} \quad \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}}\,\mathrm{d}x \quad ; \qquad \text{b)} \quad \int \mathrm{e}^{2x}(x^2+3)\,\mathrm{d}x\ .$$

Aufgabe VI: Zeigen Sie die Gültigkeit der Formel

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times (\vec{c} \times \vec{d}\,) = \vec{c}\,\big(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}\,)\big) - \vec{d}\,\big(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}\,)\big)\ .$$