

Präsenzaufgabe 26: (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen, indem Sie sie auf die Standardform $z = x + iy$ bringen:

$$\text{a) } z = (1 + i)(2 - i); \quad \text{b) } z = (2 + 3i)^4; \quad \text{c) } z = \frac{1}{1 - i}; \quad \text{d) } z = \frac{2 + i}{1 + i}.$$

Präsenzaufgabe 27: (Komplexe Ebene und Polardarstellung)

Betrachten Sie die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -1 + 2i$.

- Stellen Sie z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ als Punkte in der komplexen Ebene dar.
- Berechnen Sie die Beträge von z_1 , z_2 und $z_1 z_2$.
- Geben Sie z_1 , z_2 und $z_1 z_2$ in Polardarstellung an.

Präsenzaufgabe 28: (Komplexe Konjugation)

- Drücken Sie den Real- und Imaginärteil einer allgemeinen komplexen Zahl $z = x + iy$ durch z und z^* aus.
- Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus a), um die wichtigen Formeln

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

zu zeigen. Kommen Ihnen diese Ausdrücke bekannt vor?

Hausaufgaben für den 16.12.19

Hinweis: Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt, das Sie jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe leserlich kennzeichnen.

Hausaufgabe 29: (Eigenwerte und Eigenvektoren)

(4+1 = 5 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie ihre Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die zugehörigen Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 . Geben Sie letztere dabei als Einheitsvektoren, also als Vektoren der Länge 1, an.
- Verifizieren Sie für die von Ihnen gefundenen Eigenwerte und Eigenvektoren jeweils die Gleichung $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$.

Hausaufgabe 30: (Exponentialmatrix, Teil II)

Team

(3+3 = 6 Punkte)

Die Matrix A sei diagonalisierbar. Die zugehörige Diagonalmatrix sei gemäß (5.19) der Vorlesung gegeben durch $D = B^{-1}AB$. Auf der Diagonalen von D stehen also die Eigenwerte von A .

- Zeigen Sie die Gültigkeit der Formel $e^A = Be^DB^{-1}$.

Hinweis: Warum gilt $(BDB^{-1})^2 = BD^2B^{-1}$ und allgemein $(BDB^{-1})^n = BD^nB^{-1}$?

- Folgern Sie aus a), dass $\det(e^A) = e^{\text{Sp}A}$ gilt.

Hausaufgabe 31: (Additionstheorem)

(3 Punkte)

Beweisen Sie die trigonometrische Formel

$$\sin(4x) = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x,$$

indem Sie von dem Ansatz $\sin(4x) = \text{Im}(e^{i4x})$ ausgehen und e^{i4x} als eine vierte Potenz schreiben.

Hausaufgabe 32: (Komplexe Exponential- und Logarithmusfunktion)

(2+4 = 6 Punkte)

- Es seien $z_1 = 2 + i\frac{\pi}{2}$ und $z_2 = -2 + i\frac{3\pi}{4}$ gegeben. Bringen Sie die beiden komplexen Zahlen $w_\ell = e^{z_\ell}$ mit $\ell \in \{1, 2\}$ in die Standardform $w_\ell = x_\ell + iy_\ell$, indem Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von w_ℓ bestimmen.

- Drücken Sie die komplexen Zahlen $z_3 = \ln(ie)$ und $z_4 = \ln(\sqrt{3} + i)$ sowohl in der Standardform als auch in der Polarform aus. Es genügt dabei, den Hauptwert anzugeben.

Hinweis: $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.